OSOBINE SKUPOVA REALNIH BROJEVA

- Otvoreni i zatvoreni skupovi
- Kompletnost i CAUCHYjev kriterijum za nizove
- BANACHov stav i metod iteracija
- Kompaktnost

Otvoreni i zatvoreni skupovi

Interval:

- Otvoren (a, b) - ne sadrži krajeve;

Otvoreni i zatvoreni skupovi

Interval:

- Otvoren (a, b) - ne sadrži krajeve;
- Zatvoren $[a, b]$ - sadrži oba kraja;

Otvoreni i zatvoreni skupovi

Interval:

- Otvoren (a, b) - ne sadrži krajeve;
- Zatvoren $[a, b]$ - sadrži oba kraja;
- Ni zatvoren ni otvoren (poluotvoren, poluzatvoren) $[a, b)$ ili $(a, b]$.

Otvoreni i zatvoreni skupovi

Interval:

- Otvoren (a, b) - ne sadrži krajeve;
- Zatvoren $[a, b]$ - sadrži oba kraja;
- Ni zatvoren ni otvoren (poluotvoren, poluzatvoren) $[a, b)$ ili $(a, b]$.

Otvoren interval (a, b) zajedno sa **svakom** *svojom tačkom sadrži i* **neku** *njenu okolinu.*

Ako interval nije otvoren, bar jedna od krajnjih tačaka nema ni jednu okolinu koja pripada intervalu.

Oko svake tačke x intervala (A,B) može se opisati okolina koja isto pripada intervalu (A,B). To može biti bilo koji interval koji je podskup intervala (A,B), a sadrži x; najveća takva okolina je sam interval (A,B).

Tačke A i B zatvorenog intervala [A,B] nemaju tu osobinu.

Za skup $A \subset \mathbf{R}$ kažemo da je

- **Otvoren** ako zajedno sa svakom svojom tačkom sadrži i neku njenu okolinu

Za skup $A \subset \mathbf{R}$ kažemo da je

- **Otvoren** ako zajedno sa svakom svojom tačkom sadrži i neku njenu okolinu
- **Zatvoren** ako je A' otvoren skup

Za skup $A \subset \mathbf{R}$ kažemo da je

- **Otvoren** ako zajedno sa svakom svojom tačkom sadrži i neku njenu okolinu
- **Zatvoren** ako je A' otvoren skup

Primeri:

Za skup $A \subset \mathbf{R}$ kažemo da je

- **Otvoren** ako zajedno sa svakom svojom tačkom sadrži i neku njenu okolinu
- **Zatvoren** ako je A' otvoren skup

Primeri:

- Svaki otvoren interval, proizvoljna unija otvorenih intervala ili konačan presek, je otvoren skup.

Za skup $A \subset \mathbf{R}$ kažemo da je

- **Otvoren** ako zajedno sa svakom svojom tačkom sadrži i neku njenu okolinu
- **Zatvoren** ako je A' otvoren skup

Primeri:

- Svaki otvoren interval, proizvoljna unija otvorenih intervala ili konačan presek, je otvoren skup.
- Svaki zatvoren interval, proizvoljan presek zatvorenih intervala ili konačna unija je zatvoren skup.

Za skup $A \subset \mathbf{R}$ kažemo da je

- **Otvoren** ako zajedno sa svakom svojom tačkom sadrži i neku njenu okolinu
- **Zatvoren** ako je A' otvoren skup

Primeri:

- Svaki otvoren interval, proizvoljna unija otvorenih intervala ili konačan presek, je otvoren skup.
- Svaki zatvoren interval, proizvoljan presek zatvorenih intervala ili konačna unija je zatvoren skup.
- Prazan skup je otvoren i zatvoren; isto važi za ceo skup $\mathbf{R}$.

Za skup $A \subset \mathbf{R}$ kažemo da je

- **Otvoren** ako zajedno sa svakom svojom tačkom sadrži i neku njenu okolinu
- **Zatvoren** ako je A' otvoren skup

Primeri:

- Svaki otvoren interval, proizvoljna unija otvorenih intervala ili konačan presek, je otvoren skup.
- Svaki zatvoren interval, proizvoljan presek zatvorenih intervala ili konačna unija je zatvoren skup.
- Prazan skup je otvoren i zatvoren; isto važi za ceo skup $\mathbf{R}$.
- Skup koji se sastoji od konačno ili prebrojivo mnogo realnih brojeva, je zatvoren skup.

Za skup $A \subset \mathbf{R}$ kažemo da je

- **Otvoren** ako zajedno sa svakom svojom tačkom sadrži i neku njenu okolinu
- **Zatvoren** ako je A' otvoren skup

Primeri:

- Svaki otvoren interval, proizvoljna unija otvorenih intervala ili konačan presek, je otvoren skup.
- Svaki zatvoren interval, proizvoljan presek zatvorenih intervala ili konačna unija je zatvoren skup.
- Prazan skup je otvoren i zatvoren; isto važi za ceo skup $\mathbf{R}$.
- Skup koji se sastoji od konačno ili prebrojivo mnogo realnih brojeva, je zatvoren skup.
- Postoje skupovi koji nisu ni otvoreni ni zatvoreni.

Za skup $A \subset \mathbf{R}$ kažemo da je

- **Otvoren** ako zajedno sa svakom svojom tačkom sadrži i neku njenu okolinu
- **Zatvoren** ako je A' otvoren skup

Primeri:

- Svaki otvoren interval, proizvoljna unija otvorenih intervala ili konačan presek, je otvoren skup.
- Svaki zatvoren interval, proizvoljan presek zatvorenih intervala ili konačna unija je zatvoren skup.
- Prazan skup je otvoren i zatvoren; isto važi za ceo skup $\mathbf{R}$.
- Skup koji se sastoji od konačno ili prebrojivo mnogo realnih brojeva, je zatvoren skup.
- Postoje skupovi koji nisu ni otvoreni ni zatvoreni.
- **Pažnja:** Intervali $(-\infty, a]$ ili $[a, +\infty)$ su **zatvoreni**

Teorema 1 *Skup A je zatvoren ako i samo ako granična vrednost svakog konvergentnog niza tačaka skupa A takođe pripada skupu A.*

Teorema 1 *Skup A je zatvoren ako i samo ako granična vrednost svakog konvergentnog niza tačaka skupa A takođe pripada skupu A.*

Zatvoren u odnosu na graničnu vrednost!

Teorema 1 *Skup A je zatvoren ako i samo ako granična vrednost svakog konvergentnog niza tačaka skupa A takođe pripada skupu A.*

Zatvoren u odnosu na graničnu vrednost!

Iz ove teoreme možemo zaključiti da za svaki otvoren skup S postoji bar jedan niz tačaka tog skupa koji je konvergentan, ali njegova granična vrednost je izvan skupa S.

Navedite jedan takav niz za otvoreni interval $(0, 1)$.

Kompletnost

Neka je niz $\{x_n\}$ konvergentan, $\lim x_n = x$. Za dato $\varepsilon > 0$, neka je n_0 prvi indeks od koga je $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Za $m, n \geq n_0$ imamo da je

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle, članovi konvergentnog niza sa dovoljno velikim indeksima su na proizvoljno malom međusobnom rastojanju. Videćemo da je ova osobina veoma značajna.

Kompletnost

Neka je niz $\{x_n\}$ konvergentan, $\lim x_n = x$. Za dato $\varepsilon > 0$, neka je n_0 prvi indeks od koga je $|x_n - x| < \varepsilon/2$. Za $m, n \geq n_0$ imamo da je

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - x| + |x - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle, članovi konvergentnog niza sa dovoljno velikim indeksima su na proizvoljno malom međusobnom rastojanju. Videćemo da je ova osobina veoma značajna.

Definicija 1 Za niz $\{x_n\}$ kažemo da je **Cauchyjev niz** ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall m, n \geq n_0) \quad |x_m - x_n| < \varepsilon$$

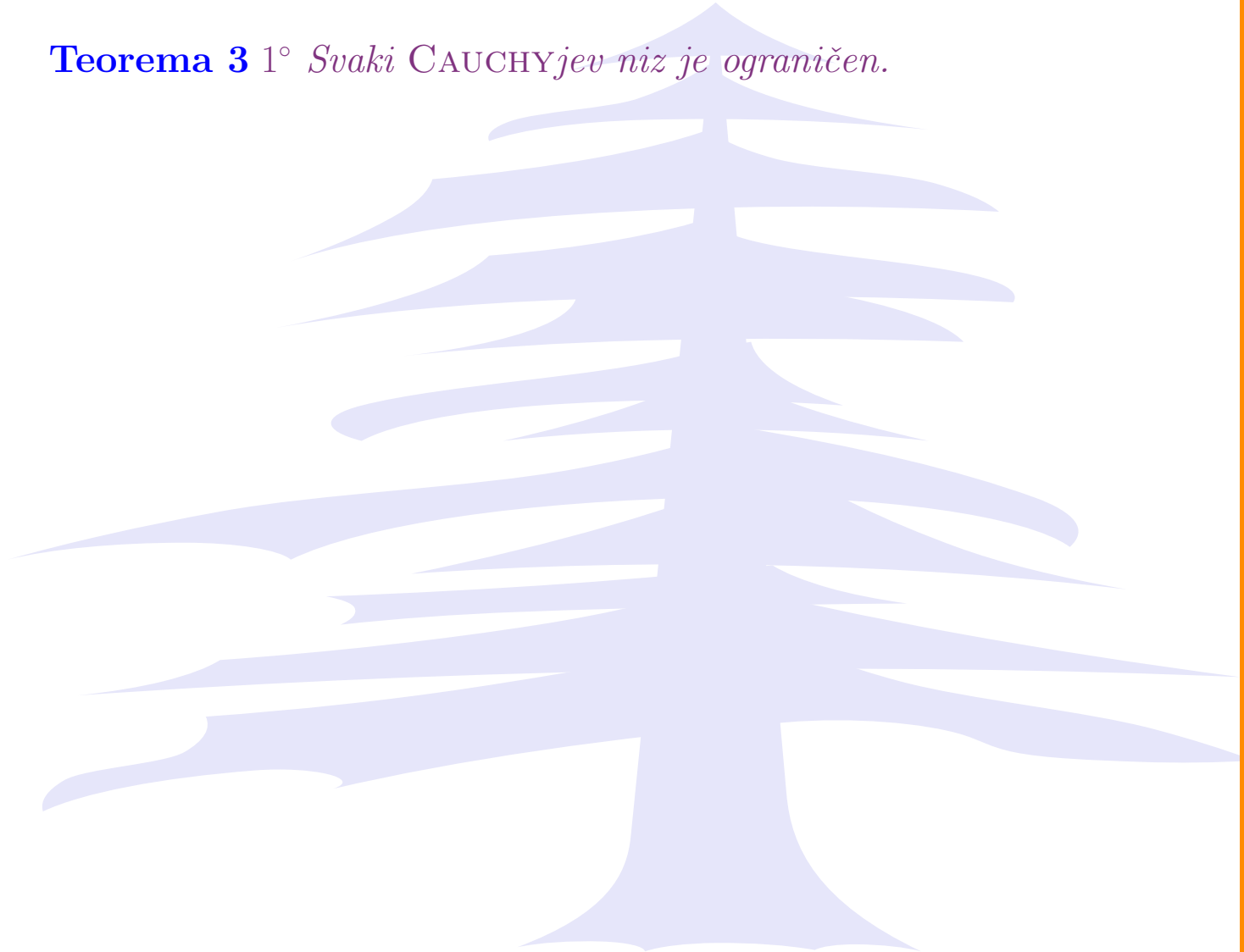
ili, ekvivalentno

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0)(\forall k \in \mathbf{N}) \quad |x_{n+k} - x_n| < \varepsilon.$$

Teorema 2 *Niz* $\{x_n\}$ *je* CAUCHY*jev ako i samo ako postoji realan nula-niz* $\{r_n\}$ *takav da za skoro svako* $n \in \mathbf{N}$ *važi*

$$|x_{n+k} - x_n| \leq r_n \quad \text{za svako } k \in \mathbf{N}. \tag{1}$$

Teorema 3 1° *Svaki* CAUCHY*jev niz je ograničen.*



Teorema 3 1° *Svaki* CAUCHY*jev niz je ograničen.*

2° *Ako* CAUCHY*jev niz ima konvergentan podniz, onda je i on konvergentan.*

Teorema 3 1° *Svaki* CAUCHY*jev niz je ograničen.*

2° *Ako* CAUCHY*jev niz ima konvergentan podniz, onda je i on konvergentan.*

Ideja za dokaz pod 1°: Počev od nekog n_0, svi članovi niza pripadaju intervalu dužine 1.

Teorema 3 1° *Svaki* CAUCHY*jev niz je ograničen.*

2° *Ako* CAUCHY*jev niz ima konvergentan podniz, onda je i on konvergentan.*

Ideja za dokaz pod 1°: Počev od nekog n_0, svi članovi niza pripadaju intervalu dužine 1.

Ideja za dokaz pod 2°: Ako je $\lim x_{n_k} = a$, tada

- $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$, za skoro svako n_k;
- $|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$, za skoro svako n i n_k (jer je niz CAUCHYjev)

• Zaključak: $|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < 2\varepsilon$ za skoro svako n.

Teorema 4 *(Cauchyjev kriterijum konvergencije nizova.) Realan niz* $\{x_n\}$ *je konvergentan ako i samo ako je* Cauchyjev.

Teorema 4 *(Cauchyjev kriterijum konvergencije nizova.) Realan niz $\{x_n\}$ je konvergentan ako i samo ako je Cauchyjev.*

Sastojci dokaza:

- Već je dokazano: ako je konvergentan, onda je Cauchyjev.

Teorema 4 *(Cauchyjev kriterijum konvergencije nizova.) Realan niz $\{x_n\}$ je konvergentan ako i samo ako je Cauchyjev.*

Sastojci dokaza:

- Već je dokazano: ako je konvergentan, onda je Cauchyjev.
- Obrnuto: Cauchyjev $\Longrightarrow$ ograničen $\Longrightarrow$ jedan podniz konvergentan $\Longrightarrow$ konvergentan.

CAUCHYjev kriterijum omogućuje ispitivanje konvergencije niza **bez efektivnog nalaženja njegovog limesa**.

CAUCHYjev kriterijum omogućuje ispitivanje konvergencije niza **bez efektivnog nalaženja njegovog limesa**.

Primer: Dokazati da niz čiji je opšti član dat sa

$$x_n = \frac{\sin 1}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\sin n}{n(n+1)}$$

ima konačnu graničnu vrednost

CAUCHYjev kriterijum omogućuje ispitivanje konvergencije niza **bez efektivnog nalaženja njegovog limesa**.

Primer: Dokazati da niz čiji je opšti član dat sa

$$x_n = \frac{\sin 1}{1 \cdot 2} + \frac{\sin 2}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\sin n}{n(n+1)}$$

ima konačnu graničnu vrednost

Primer: Ako je

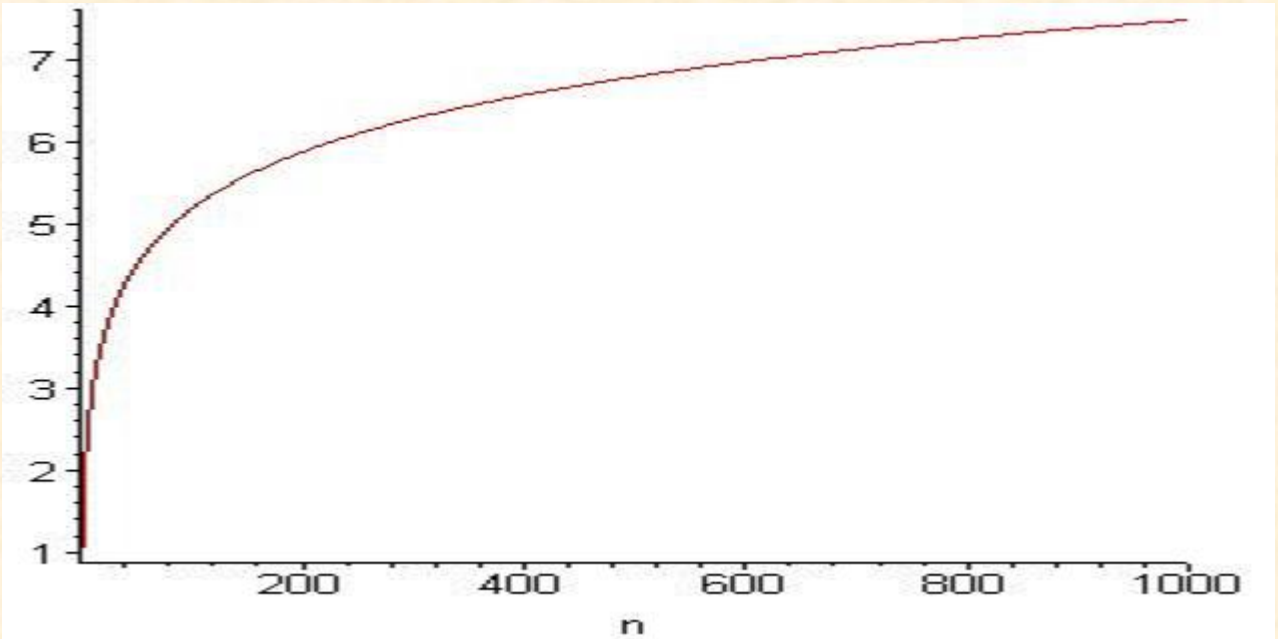
$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

dokazati da je $\lim x_n = +\infty$.

Ovo nije "očigledno" ni uz pomoć računara:

Grafički prikaz niza $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ u zavisnosti od n

(interpolisano između celih brojeva)



Osobina skupa realnih brojeva da u njemu svaki CAUCHYjev niz konvergira, zove se **kompletnost**. Skup realnih brojeva je kompletan.

Osobina skupa realnih brojeva da u njemu svaki CAUCHYjev niz konvergira, zove se **kompletnost**. Skup realnih brojeva je kompletan.

Inače, kaže se da je skup kompletan ako svaki CAUCHYjev niz iz tog skupa ima graničnu vrednost koja takođe pripada tom skupu.

Osobina skupa realnih brojeva da u njemu svaki CAUCHYjev niz konvergira, zove se **kompletnost**. Skup realnih brojeva je kompletan.

Inače, kaže se da je skup kompletan ako svaki CAUCHYjev niz iz tog skupa ima graničnu vrednost koja također pripada tom skupu.

Podskup skupa realnih brojeva je kompletan ako i samo ako je zatvoren-lak dokaz!

Osobina skupa realnih brojeva da u njemu svaki CAUCHYjev niz konvergira, zove se **kompletnost**. Skup realnih brojeva je kompletan.

Inače, kaže se da je skup kompletan ako svaki CAUCHYjev niz iz tog skupa ima graničnu vrednost koja takođe pripada tom skupu.

Podskup skupa realnih brojeva je kompletan ako i samo ako je zatvoren-lak dokaz!

Primeri kompletnih skupova:

$$[a, b], \quad [a, +\infty), \quad (-\infty, b], \quad (-\infty, +\infty)$$

Banachov stav i metod iteracije

Zadatak: Naći približno rešenje jednačine $\sin x - x + 1 = 0$.

Banachov stav i metod iteracije

Zadatak: Naći približno rešenje jednačine $\sin x - x + 1 = 0$.

Metod iteracija:

Banachov stav i metod iteracije

Zadatak: Naći približno rešenje jednačine $\sin x - x + 1 = 0$.

Metod iteracija:

- Jednačinu pišemo u obliku $x = f(x)$, gde je $f(x) = \sin x + 1$.

Banachov stav i metod iteracije

Zadatak: Naći približno rešenje jednačine $\sin x - x + 1 = 0$.

Metod iteracija:

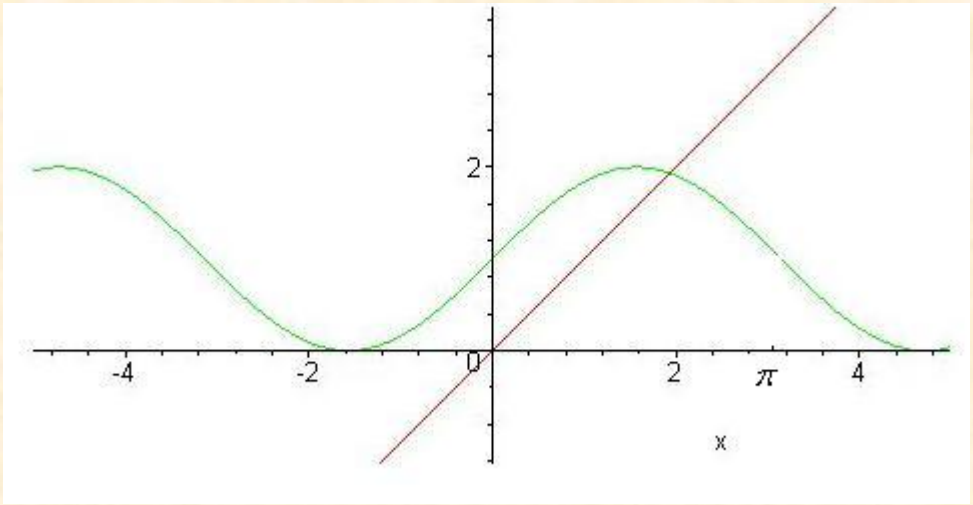
- Jednačinu pišemo u obliku $x = f(x)$, gde je $f(x) = \sin x + 1$.
- Traži se presek prave $y = x$ i krive $y = f(x)$;

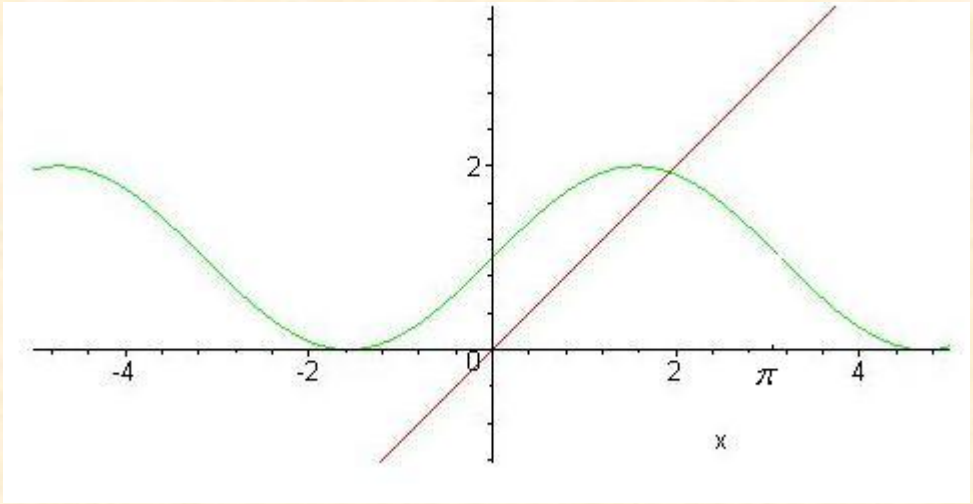
Banachov stav i metod iteracije

Zadatak: Naći približno rešenje jednačine $\sin x - x + 1 = 0$.

Metod iteracija:

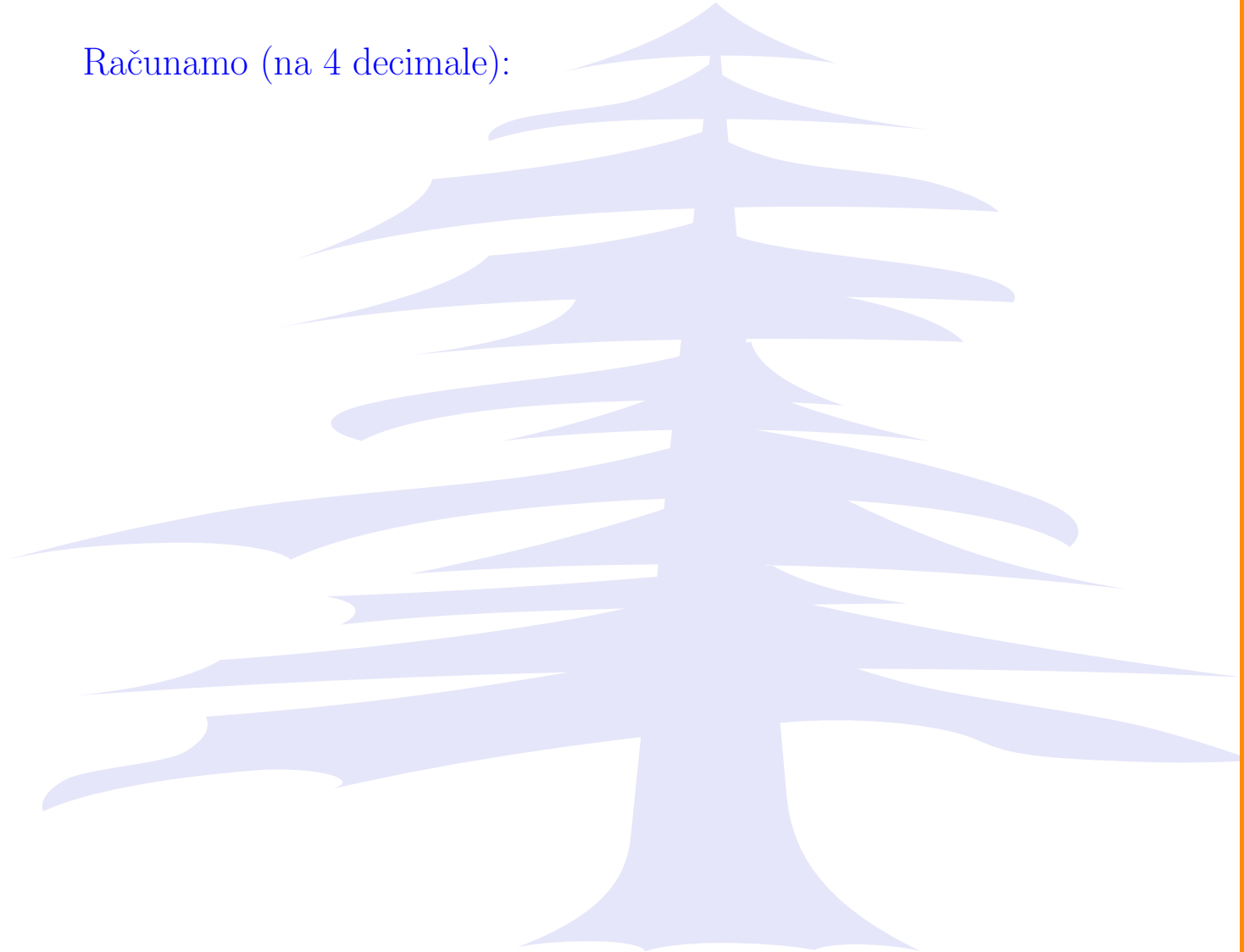
- Jednačinu pišemo u obliku $x = f(x)$, gde je $f(x) = \sin x + 1$.
- Traži se presek prave $y = x$ i krive $y = f(x)$;


2
-4
-2
0
2
π
4
x



Rešenje je u intervalu $(0, \pi)$.

Računamo (na 4 decimale):



Računamo (na 4 decimale):

- $x_1 = \pi/2$ (početna vrednost);

Računamo (na 4 decimale):

- $x_1 = \pi/2$ (početna vrednost);
- $x_2 = f(x_1) = 2$;

Računamo (na 4 decimale):

- $x_1 = \pi/2$ (početna vrednost);
- $x_2 = f(x_1) = 2$;
- $x_3 = f(x_2) = 1.9433$;

Računamo (na 4 decimale):

- $x_1 = \pi/2$ (početna vrednost);
- $x_2 = f(x_1) = 2$;
- $x_3 = f(x_2) = 1.9433$;
- $x_4 = f(x_3) = 1.9314$;

Računamo (na 4 decimale):

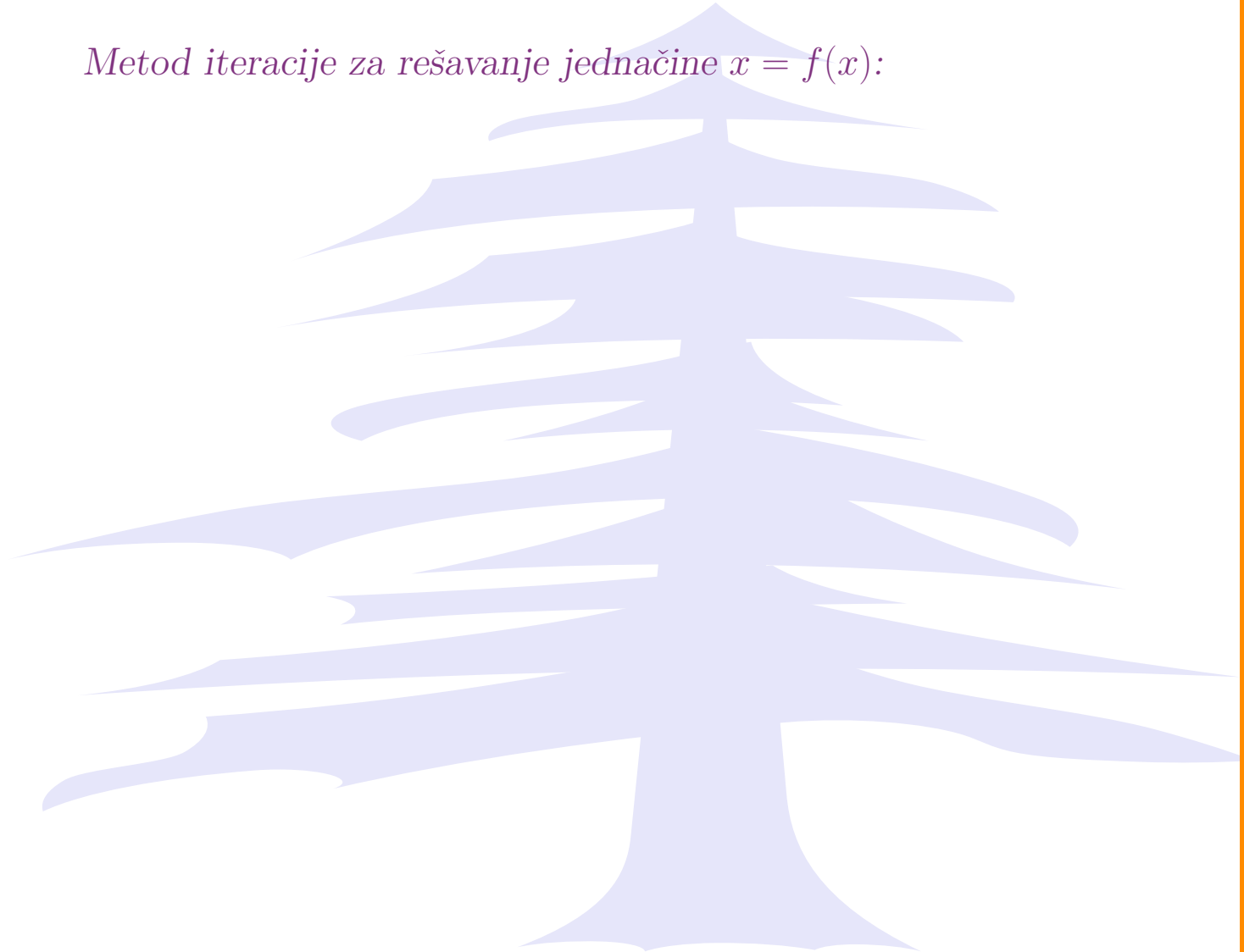
- $x_1 = \pi/2$ (početna vrednost);
- $x_2 = f(x_1) = 2$;
- $x_3 = f(x_2) = 1.9433$;
- $x_4 = f(x_3) = 1.9314$;
- $x_5 = f(x_4) = 1.9357$;

Računamo (na 4 decimale):

- $x_1 = \pi/2$ (početna vrednost);
- $x_2 = f(x_1) = 2$;
- $x_3 = f(x_2) = 1.9433$;
- $x_4 = f(x_3) = 1.9314$;
- $x_5 = f(x_4) = 1.9357$;
- $x_6 = f(x_5) = 1.9342$;
- $x_7 = f(x_6) = 1.9347$;
- $x_8 = f(x_7) = 1.9345$;
- $x_9 = f(x_8) = 1.9346$;
- $x_{10} = f(x_9) = 1.9346$;
- $x_{11} = f(x_{10}) = 1.9346$

Rešenje (na 4 decimale) je 1.9346. Jednostavno?

Metod iteracije za rešavanje jednačine $x = f(x)$*:*



Metod iteracije za rešavanje jednačine $x = f(x)$:

- *Početna vrednost:* x_1

Metod iteracije za rešavanje jednačine $x = f(x)$:

- *Početna vrednost:* x_1
- *Niz definisan sa* $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *konvergira ka rešenju jednačine ?*

Metod iteracije za rešavanje jednačine $x = f(x)$:

- *Početna vrednost: x_1*
- *Niz definisan sa $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, konvergira ka rešenju jednačine ?*

Ali ne uvek...

Metod iteracije za rešavanje jednačine $x = f(x)$:

- *Početna vrednost: x_1*
- *Niz definisan sa $x_{n+1} = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, konvergira ka rešenju jednačine ?*

Ali ne uvek...

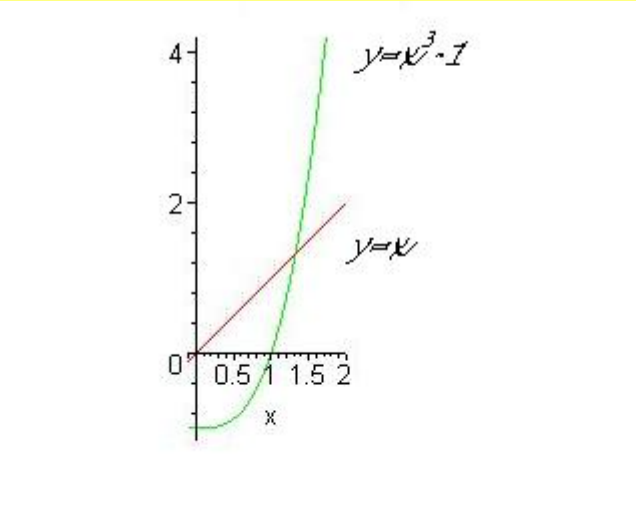
Primer: Za jednačinu $x = x^3 - 1$, opisani postupak daje niz

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1,\ x_4 = -2,\ x_5 = -9,\ x_6 = -730, \ldots$$

Primer: Za jednačinu $x = x^3 - 1$, opisani postupak daje niz

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1,\ x_4 = -2,\ x_5 = -9,\ x_6 = -730, \ldots$$

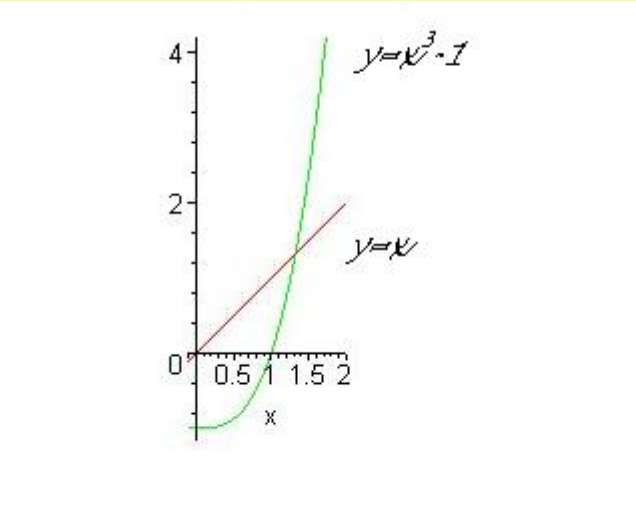
Ipak, jednačina ima rešenje blizu $x = 1$, kao što se vidi:



Primer: Za jednačinu $x = x^3 - 1$, opisani postupak daje niz

$$x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = -1,\ x_4 = -2,\ x_5 = -9,\ x_6 = -730, \ldots$$

Ipak, jednačina ima rešenje blizu $x = 1$, kao što se vidi:



Trebaju nam uslovi pod kojima metod iteracije daje rešenje!

Definicija 2

- Neka je S podskup skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$ i neka je f preslikavanje koje S preslikava u S, tj. $f(S) \subset S$. Svako rešenje jednačine $x = f(x)$ nazivamo **nepokretnom (ili fiksnom) tačkom** preslikavanja f.

Definicija 2

- Neka je S podskup skupa realnih brojeva $\mathbf{R}$ i neka je f preslikavanje koje S preslikava u S, tj. $f(S) \subset S$. Svako rešenje jednačine $x = f(x)$ nazivamo **nepokretnom (ili fiksnom) tačkom** preslikavanja f.
- Preslikavanje $f : S \mapsto S$ je **kontrakcija** skupa S ako postoji realan broj q, $0 < q < 1$, takav da za svako $x, y \in S$ važi nejednakost

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|.$$

Teorema 5 *(Banachov stav o nepokretnoj tački.) Neka je S* **kompletan skup** *i neka je f* **kontrakcija** *tog skupa. Tada f ima* **jedinstvenu** *nepokretnu tačku $x \in S$. Nepokretna tačka x je granična vrednost niza definisanog sa*

$$x_1 \in S, \qquad x_{n+1} = f(x_n) \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

gde se početna tačka x_1 može izabrati proizvoljno u skupu S. Pri tome važi nejednakost

$$|x_n - x| \leq \frac{q^{n-1}}{1-q}|x_1 - x_2|, \quad n = 2, 3 \ldots \tag{3}$$

Videli smo da metod iteracija ne daje rešenje jednačine $x = x^3 - 1$. Međutim, ova jednačina može se pretstaviti i u obliku

$$x = f(x) = \sqrt[3]{x+1}.$$

Videli smo da metod iteracija ne daje rešenje jednačine $x = x^3 - 1$. Međutim, ova jednačina može se pretstaviti i u obliku

$$x = f(x) = \sqrt[3]{x+1}.$$

- Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ preslikava interval $S = [0, +\infty)$ u sebe, tačnije, $f(S) = [1, +\infty) \subset S$.

Videli smo da metod iteracija ne daje rešenje jednačine $x = x^3 - 1$. Međutim, ova jednačina može se pretstaviti i u obliku

$$x = f(x) = \sqrt[3]{x+1}.$$

- Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ preslikava interval $S = [0, +\infty)$ u sebe, tačnije, $f(S) = [1, +\infty) \subset S$.
- Skup S je kompletan skup.

Videli smo da metod iteracija ne daje rešenje jednačine $x = x^3 - 1$. Međutim, ova jednačina može se pretstaviti i u obliku

$$x = f(x) = \sqrt[3]{x+1}.$$

- Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ preslikava interval $S = [0, +\infty)$ u sebe, tačnije, $f(S) = [1, +\infty) \subset S$.
- Skup S je kompletan skup.
- Kontrakcija:

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x-y|}{(x+1)^{2/3} + (x+1)^{1/3}(y+1)^{1/3} + (y+1)^{2/3}}$$
$$\leq \tfrac{1}{3}|x-y|,$$

$q = 1/3$.

Iteracioni niz:

$$1,\ 1.2599,\ 1.3123,\ 1.3224,\ 1.3243,\ 1.3246,\ 1.3246,\ 1.3247,\ 1.3247\ldots$$

Iteracioni niz:

$$1,\ 1.2599,\ 1.3123,\ 1.3224,\ 1.3243,\ 1.3246,\ 1.3246,\ 1.3247,\ 1.3247\ldots$$

Iz nejednakosti u iskazu BANACHovog stava, može se videti posle koliko iteracija se postiže željena tačnost. Sa $x_1 = 1, x_2 = 1.2599$ i $q = 1/3$, dobijamo da je

$$|x_n - x| \leq 0.38985(1/3)^{n-1}.$$

Iteracioni niz:

$$1,\ 1.2599,\ 1.3123,\ 1.3224,\ 1.3243,\ 1.3246,\ 1.3246,\ 1.3247,\ 1.3247\ldots$$

Iz nejednakosti u iskazu BANACHovog stava, može se videti posle koliko iteracija se postiže željena tačnost. Sa $x_1 = 1, x_2 = 1.2599$ i $q = 1/3$, dobijamo da je

$$|x_n - x| \leq 0.38985(1/3)^{n-1}.$$

Neka je $\varepsilon_n = 0.38985(1/3)^{n-1}$. Dakle, **greška** koja se pravi u n-tom koraku ako se tačno (**ali nepoznato**) x zameni sa x_n sigurno nije veća od ε_n.

Iteracioni niz:

$$1,\ 1.2599,\ 1.3123,\ 1.3224,\ 1.3243,\ 1.3246,\ 1.3246,\ 1.3247,\ 1.3247\ldots$$

Iz nejednakosti u iskazu BANACHovog stava, može se videti posle koliko iteracija se postiže željena tačnost. Sa $x_1 = 1, x_2 = 1.2599$ i $q = 1/3$, dobijamo da je

$$|x_n - x| \leq 0.38985(1/3)^{n-1}.$$

Neka je $\varepsilon_n = 0.38985(1/3)^{n-1}$. Dakle, **greška** koja se pravi u n-tom koraku ako se tačno (**ali nepoznato**) x zameni sa x_n sigurno nije veća od ε_n.

Koliko treba da bude n da bismo bili sigurni da greška nije veća od 0.05?

Iteracioni niz:

$$1,\ 1.2599,\ 1.3123,\ 1.3224,\ 1.3243,\ 1.3246,\ 1.3246,\ 1.3247,\ 1.3247\ldots$$

Iz nejednakosti u iskazu BANACHovog stava, može se videti posle koliko iteracija se postiže željena tačnost. Sa $x_1 = 1, x_2 = 1.2599$ i $q = 1/3$, dobijamo da je

$$|x_n - x| \leq 0.38985(1/3)^{n-1}.$$

Neka je $\varepsilon_n = 0.38985(1/3)^{n-1}$. Dakle, **greška** koja se pravi u n-tom koraku ako se tačno (**ali nepoznato**) x zameni sa x_n sigurno nije veća od ε_n.

Koliko treba da bude n da bismo bili sigurni da greška nije veća od 0.05?

$$\varepsilon_1 = 0.38985,\ \varepsilon_2 = 0.12995,\ \varepsilon_3 = 0.043317, \ldots$$

Znači da se za $n = 3$ postiže tražena tačnost; $x \approx x_3 = 1.3123$

Iteracioni niz:

$$1,\ 1.2599,\ 1.3123,\ 1.3224,\ 1.3243,\ 1.3246,\ 1.3246,\ 1.3247,\ 1.3247\ldots$$

Iz nejednakosti u iskazu BANACHovog stava, može se videti posle koliko iteracija se postiže željena tačnost. Sa $x_1 = 1, x_2 = 1.2599$ i $q = 1/3$, dobijamo da je

$$|x_n - x| \leq 0.38985(1/3)^{n-1}.$$

Neka je $\varepsilon_n = 0.38985(1/3)^{n-1}$. Dakle, **greška** koja se pravi u n-tom koraku ako se tačno (**ali nepoznato**) x zameni sa x_n sigurno nije veća od ε_n.

Koliko treba da bude n da bismo bili sigurni da greška nije veća od 0.05?

$$\varepsilon_1 = 0.38985,\ \varepsilon_2 = 0.12995,\ \varepsilon_3 = 0.043317,\ldots$$

Znači da se za $n = 3$ postiže tražena tačnost; $x \approx x_3 = 1.3123$

U praksi se često uzima kriterijum da je $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, gde je ε zadata vrednost maksimalne greške.

Uslovi Banachovog stava su samo dovoljni. Iteracioni niz može da konvergira iako oni nisu ispunjeni.

Primena kod ispitivanja konvergencije nizova zadatih rekurentnom formulom

Primena kod ispitivanja konvergencije nizova zadatih rekurentnom formulom

Niz je definisan sa

$$x_1 = \frac{1}{3}, \qquad x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n}}{1+\sqrt{x_n}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ispitati da li je niz konvergentan i naći graničnu vrednost ako postoji.

Primena kod ispitivanja konvergencije nizova zadatih rekurentnom formulom

Niz je definisan sa

$$x_1 = \frac{1}{3}, \qquad x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n}}{1+\sqrt{x_n}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ispitati da li je niz konvergentan i naći graničnu vrednost ako postoji.

- $f(x) = \sqrt{x}/(1+\sqrt{x})$;

Primena kod ispitivanja konvergencije nizova zadatih rekurentnom formulom

Niz je definisan sa

$$x_1 = \frac{1}{3}, \qquad x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n}}{1+\sqrt{x_n}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ispitati da li je niz konvergentan i naći graničnu vrednost ako postoji.

- $f(x) = \sqrt{x}/(1+\sqrt{x})$;
- $0 < f(x) < 1$

Primena kod ispitivanja konvergencije nizova zadatih rekurentnom formulom

Niz je definisan sa

$$x_1 = \frac{1}{3}, \qquad x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n}}{1+\sqrt{x_n}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ispitati da li je niz konvergentan i naći graničnu vrednost ako postoji.

- $f(x) = \sqrt{x}/(1+\sqrt{x})$;
- $0 < f(x) < 1$
- Ako je $I = [1/3, 1]$, onda $f(I) \subset I$;

Primena kod ispitivanja konvergencije nizova zadatih rekurentnom formulom

Niz je definisan sa

$$x_1 = \frac{1}{3}, \qquad x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n}}{1+\sqrt{x_n}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ispitati da li je niz konvergentan i naći graničnu vrednost ako postoji.

- $f(x) = \sqrt{x}/(1+\sqrt{x})$;
- $0 < f(x) < 1$
- Ako je $I = [1/3, 1]$, onda $f(I) \subset I$;
- $|f(x) - f(y)| < \frac{\sqrt{3}}{2}|x - y|$, za $x, y \in I$ (kontrakcija sa $q = \sqrt{3}/2$)

Primena kod ispitivanja konvergencije nizova zadatih rekurentnom formulom

Niz je definisan sa

$$x_1 = \frac{1}{3}, \qquad x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n}}{1+\sqrt{x_n}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ispitati da li je niz konvergentan i naći graničnu vrednost ako postoji.

- $f(x) = \sqrt{x}/(1+\sqrt{x})$;
- $0 < f(x) < 1$
- Ako je $I = [1/3, 1]$, onda $f(I) \subset I$;
- $|f(x) - f(y)| < \frac{\sqrt{3}}{2}|x - y|$, za $x, y \in I$ (kontrakcija sa $q = \sqrt{3}/2$)
- Zaključak: Dati niz je konvergentan, i njegov limes pripada skupu I.

Primena kod ispitivanja konvergencije nizova zadatih rekurentnom formulom

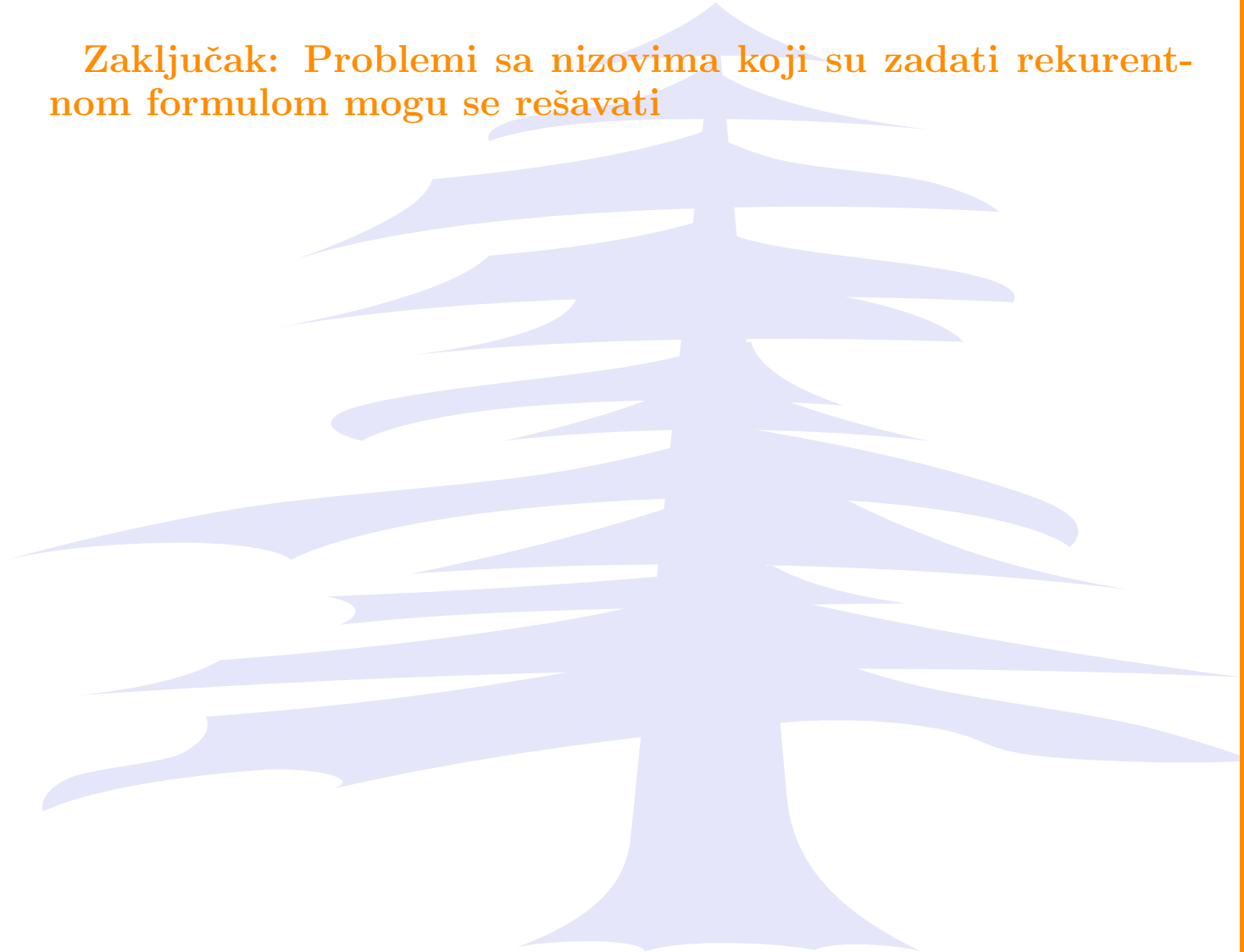
Niz je definisan sa

$$x_1 = \frac{1}{3}, \qquad x_{n+1} = \frac{\sqrt{x_n}}{1+\sqrt{x_n}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Ispitati da li je niz konvergentan i naći graničnu vrednost ako postoji.

- $f(x) = \sqrt{x}/(1+\sqrt{x})$;
- $0 < f(x) < 1$
- Ako je $I = [1/3, 1]$, onda $f(I) \subset I$;
- $|f(x) - f(y)| < \frac{\sqrt{3}}{2}|x - y|$, za $x, y \in I$ (kontrakcija sa $q = \sqrt{3}/2$)
- Zaključak: Dati niz je konvergentan, i njegov limes pripada skupu I.
- Rešenje jednačine $x = f(x)$ (smenom $t = \sqrt{x}$) je $x = (3 - \sqrt{5})/2$.

Zaključak: Problemi sa nizovima koji su zadati rekurentnom formulom mogu se rešavati



Zaključak: Problemi sa nizovima koji su zadati rekurentnom formulom mogu se rešavati

- primenom teoreme o monotonom i ograničenom nizu

Zaključak: Problemi sa nizovima koji su zadati rekurentnom formulom mogu se rešavati

- primenom teoreme o monotonom i ograničenom nizu
- primenom BANACHovog stava o nepokretnoj tački

Zaključak: Problemi sa nizovima koji su zadati rekurentnom formulom mogu se rešavati

- primenom teoreme o monotonom i ograničenom nizu
- primenom BANACHovog stava o nepokretnoj tački
- Nalaženjem eksplicitne formule za opšti član niza

Kompaktnost

Skup S je **kompaktan** ako svaki niz tačaka iz S ima **bar jedan** konvergentan podniz čija granična vrednost takođe pripada skupu S.

Svaki zatvoren i ograničen skup $S \subset \mathbf{R}$ je kompaktan.

Dokaz:

Kompaktnost

Skup S je **kompaktan** ako svaki niz tačaka iz S ima **bar jedan** konvergentan podniz čija granična vrednost takođe pripada skupu S.

Svaki zatvoren i ograničen skup $S \subset \mathbf{R}$ je kompaktan.

Dokaz:

- Neka je $\{x_n\}$ proizvoljan niz iz S.

Kompaktnost

Skup S je **kompaktan** ako svaki niz tačaka iz S ima **bar jedan** konvergentan podniz čija granična vrednost takođe pripada skupu S.

Svaki zatvoren i ograničen skup $S \subset \mathbf{R}$ je kompaktan.

Dokaz:

- Neka je $\{x_n\}$ proizvoljan niz iz S.
- Ograničen: Bolzano-Weierstrass;

Kompaktnost

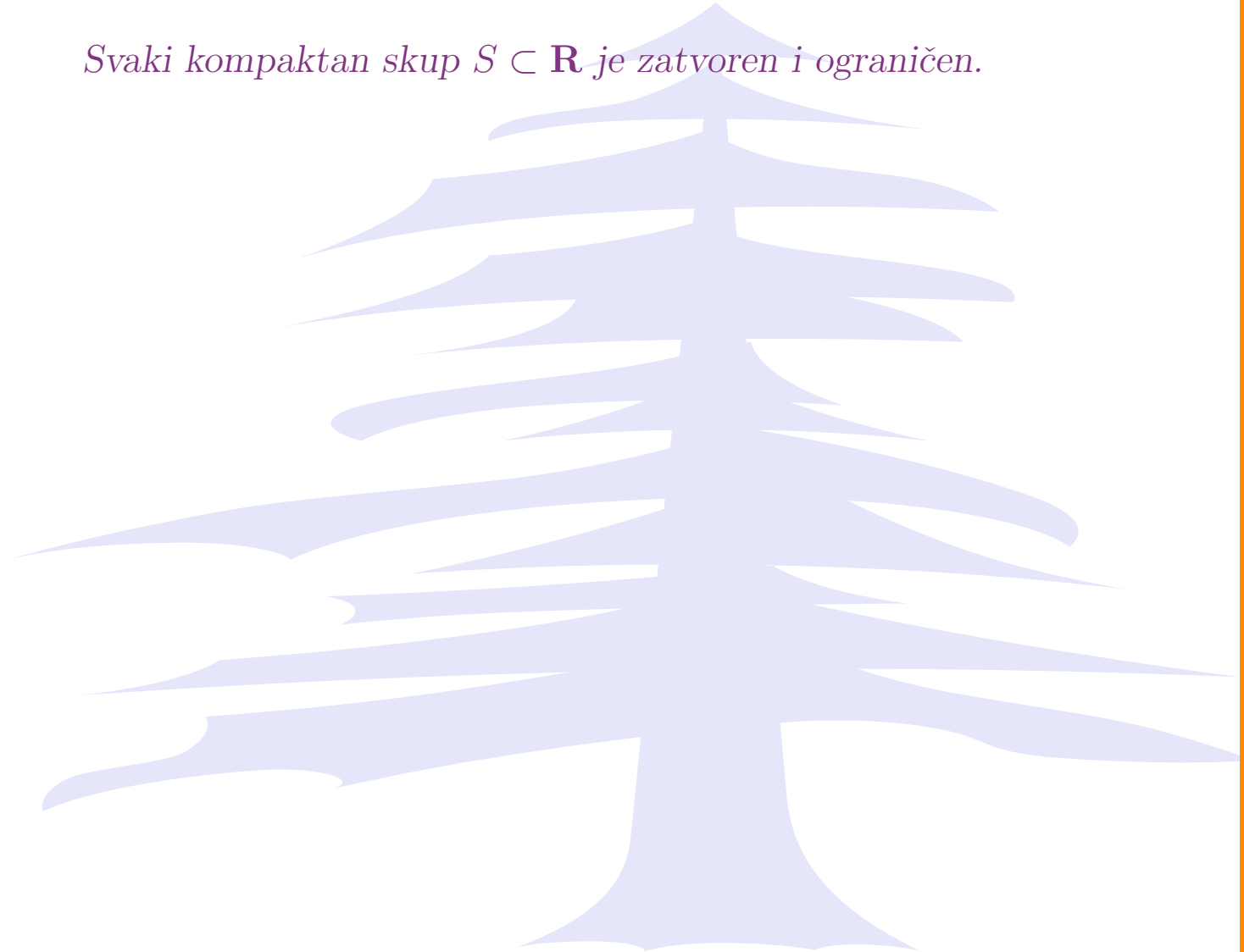
Skup S je **kompaktan** ako svaki niz tačaka iz S ima **bar jedan** konvergentan podniz čija granična vrednost takođe pripada skupu S.

Svaki zatvoren i ograničen skup $S \subset \mathbf{R}$ je kompaktan.

Dokaz:

- Neka je $\{x_n\}$ proizvoljan niz iz S.
- Ograničen: Bolzano-Weierstrass;
- Zatvoren: Limes ostaje u intervalu

Svaki kompaktan skup $S \subset \mathbf{R}$ je zatvoren i ograničen.



Svaki kompaktan skup $S \subset \mathbf{R}$ je zatvoren i ograničen.

Dokaz: Neka je S kompaktan skup, znači da svaki niz iz S sadrži konvergentan podniz, i da limes tog podniza pripada S.

Svaki kompaktan skup $S \subset \mathbf{R}$ je zatvoren i ograničen.

Dokaz: Neka je S kompaktan skup, znači da svaki niz iz S sadrži konvergentan podniz, i da limes tog podniza pripada S.

- Ako bi bio neograničen, postojao bi niz $x_n \in S$, $\lim x_n = +\infty$ (npr.), ne sadrži konvergentan podniz, dakle S ne bi bio kompaktan.

Svaki kompaktan skup $S \subset \mathbf{R}$ je zatvoren i ograničen.

Dokaz: Neka je S kompaktan skup, znači da svaki niz iz S sadrži konvergentan podniz, i da limes tog podniza pripada S.

- Ako bi bio neograničen, postojao bi niz $x_n \in S$, $\lim x_n = +\infty$ (npr.), ne sadrži konvergentan podniz, dakle S ne bi bio kompaktan.
- Ako ne bi bio zatvoren, postojao bi konvergentan niz u S, čiji limes nije u S, pa S ne bi bio kompaktan.

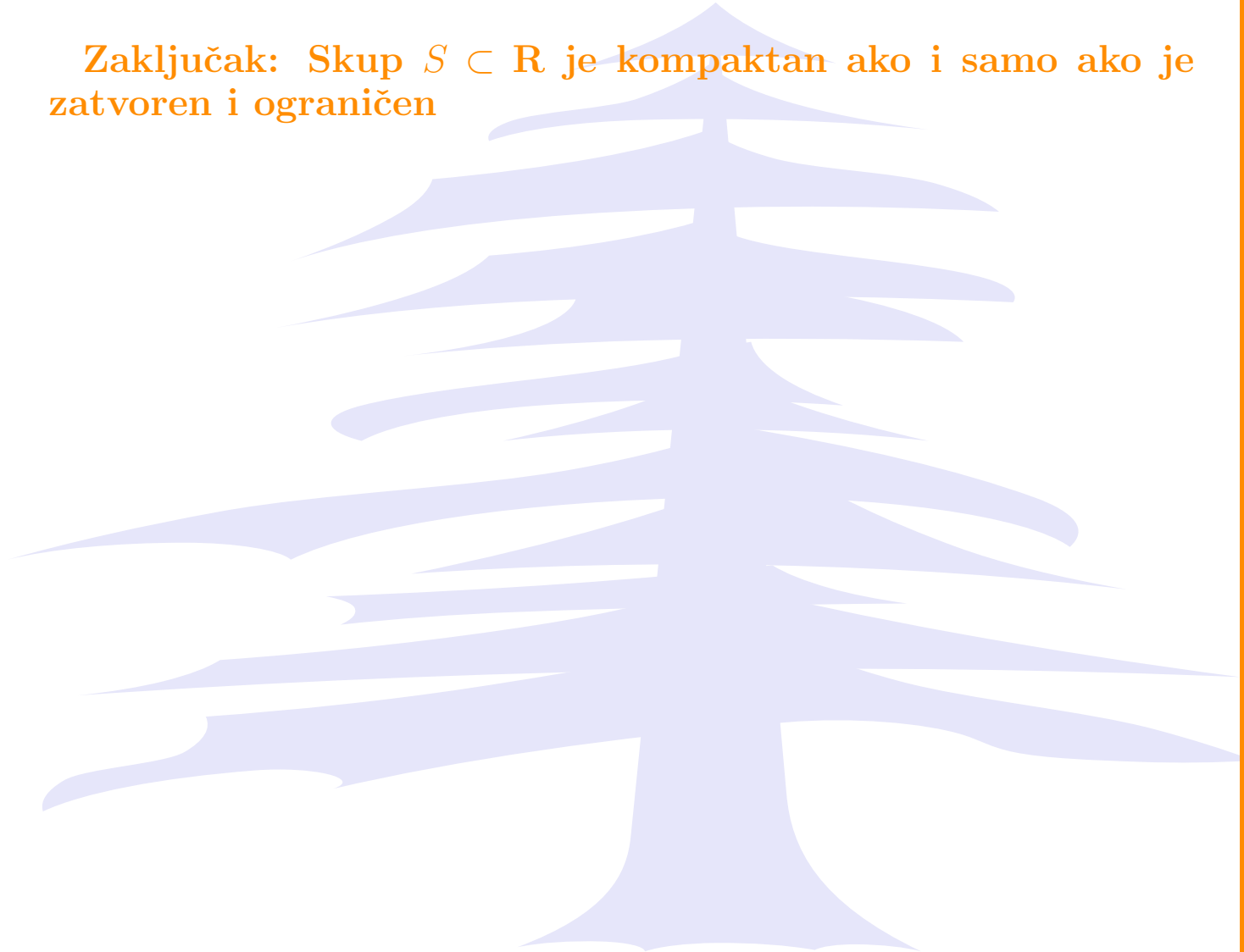
Svaki kompaktan skup $S \subset \mathbf{R}$ je zatvoren i ograničen.

Dokaz: Neka je S kompaktan skup, znači da svaki niz iz S sadrži konvergentan podniz, i da limes tog podniza pripada S.

- Ako bi bio neograničen, postojao bi niz $x_n \in S$, $\lim x_n = +\infty$ (npr.), ne sadrži konvergentan podniz, dakle S ne bi bio kompaktan.
- Ako ne bi bio zatvoren, postojao bi konvergentan niz u S, čiji limes nije u S, pa S ne bi bio kompaktan.

Metod primenjen u dokazu zove se **kontrapozicija**: dokazuje se da P povlači Q tako što se pokaže da ne-Q povlači ne-P.

Zaključak: Skup $S \subset \mathbf{R}$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen



Zaključak: Skup $S \subset \mathbf{R}$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen

Primeri kompaktnih skupova:

Zaključak: Skup $S \subset \mathbf{R}$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen

Primeri kompaktnih skupova:

- Svaki zatvoren i ograničen interval $[a, b]$;

Zaključak: Skup $S \subset \mathbf{R}$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen

Primeri kompaktnih skupova:

- Svaki zatvoren i ograničen interval $[a, b]$;
- Svaki skup od konačno mnogo tačaka;

Zaključak: Skup $S \subset \mathbf{R}$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen

Primeri kompaktnih skupova:

- Svaki zatvoren i ograničen interval $[a, b]$;
- Svaki skup od konačno mnogo tačaka;
- Unija konačno mnogo zatvorenih ograničenih intervala

Zaključak: Skup $S \subset \mathbf{R}$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen

Primeri kompaktnih skupova:

- Svaki zatvoren i ograničen interval $[a, b]$;
- Svaki skup od konačno mnogo tačaka;
- Unija konačno mnogo zatvorenih ograničenih intervala

Primeri skupova koji nisu kompaktni:

Zaključak: Skup $S \subset \mathbf{R}$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen

Primeri kompaktnih skupova:

- Svaki zatvoren i ograničen interval $[a, b]$;
- Svaki skup od konačno mnogo tačaka;
- Unija konačno mnogo zatvorenih ograničenih intervala

Primeri skupova koji nisu kompaktni:

- Otvoreni interval (a, b);

Zaključak: Skup $S \subset \mathbf{R}$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen

Primeri kompaktnih skupova:

- Svaki zatvoren i ograničen interval $[a, b]$;
- Svaki skup od konačno mnogo tačaka;
- Unija konačno mnogo zatvorenih ograničenih intervala

Primeri skupova koji nisu kompaktni:

- Otvoreni interval (a, b);
- Zatvoreni interval $[a, +\infty)$

Zaključak: Skup $S \subset \mathbf{R}$ je kompaktan ako i samo ako je zatvoren i ograničen

Primeri kompaktnih skupova:

- Svaki zatvoren i ograničen interval $[a, b]$;
- Svaki skup od konačno mnogo tačaka;
- Unija konačno mnogo zatvorenih ograničenih intervala

Primeri skupova koji nisu kompaktni:

- Otvoreni interval (a, b);
- Zatvoreni interval $[a, +\infty)$
- Skup $\mathbf{R}$

ZAKLJUČAK:

- Skup može biti:

ZAKLJUČAK:

- Skup može biti:

  Ograničen, neograničen

ZAKLJUČAK:

- Skup može biti:

  Ograničen, neograničen

  Otvoren, zatvoren

ZAKLJUČAK:

- Skup može biti:
  - Ograničen, neograničen
  - Otvoren, zatvoren
  - Kompletan

ZAKLJUČAK:

- Skup može biti:
  - Ograničen, neograničen
  - Otvoren, zatvoren
  - Kompletan
  - Kompaktan

ZAKLJUČAK:

- Skup može biti:
  - Ograničen, neograničen
  - Otvoren, zatvoren
  - Kompletan
  - Kompaktan
- Pomoću CAUCHYjevog kriterijuma konvergencije nizova možemo da

ZAKLJUČAK:

- Skup može biti:
  - Ograničen, neograničen
  - Otvoren, zatvoren
  - Kompletan
  - Kompaktan
- Pomoću CAUCHYjevog kriterijuma konvergencije nizova možemo da ustanovimo da je niz konvergentan bez nalaženja limesa

ZAKLJUČAK:

- Skup može biti:
  - Ograničen, neograničen
  - Otvoren, zatvoren
  - Kompletan
  - Kompaktan
- Pomoću CAUCHYjevog kriterijuma konvergencije nizova možemo da
  - ustanovimo da je niz konvergentan bez nalaženja limesa
  - ustanovimo da je niz divergentan

ZAKLJUČAK:

- Skup može biti:
  - Ograničen, neograničen
  - Otvoren, zatvoren
  - Kompletan
  - Kompaktan
- Pomoću CAUCHYjevog kriterijuma konvergencije nizova možemo da
  - ustanovimo da je niz konvergentan bez nalaženja limesa
  - ustanovimo da je niz divergentan
- Koristeći se Banachovim stavom o nepokretnoj tački, možemo da

ZAKLJUČAK:

- Skup može biti:
  - Ograničen, neograničen
  - Otvoren, zatvoren
  - Kompletan
  - Kompaktan
- Pomoću CAUCHYjevog kriterijuma konvergencije nizova možemo da ustanovimo da je niz konvergentan bez nalaženja limesa ustanovimo da je niz divergentan
- Koristeći se Banachovim stavom o nepokretnoj tački, možemo da rešavamo jednačine metodom iteracije

ZAKLJUČAK:

- Skup može biti:
  - Ograničen, neograničen
  - Otvoren, zatvoren
  - Kompletan
  - Kompaktan
- Pomoću CAUCHYjevog kriterijuma konvergencije nizova možemo da
  - ustanovimo da je niz konvergentan bez nalaženja limesa
  - ustanovimo da je niz divergentan
- Koristeći se Banachovim stavom o nepokretnoj tački, možemo da
  - rešavamo jednačine metodom iteracije
  - ispitujemo konvergenciju nizova zadatih rekurentnom formulom

- Metode dokaza:

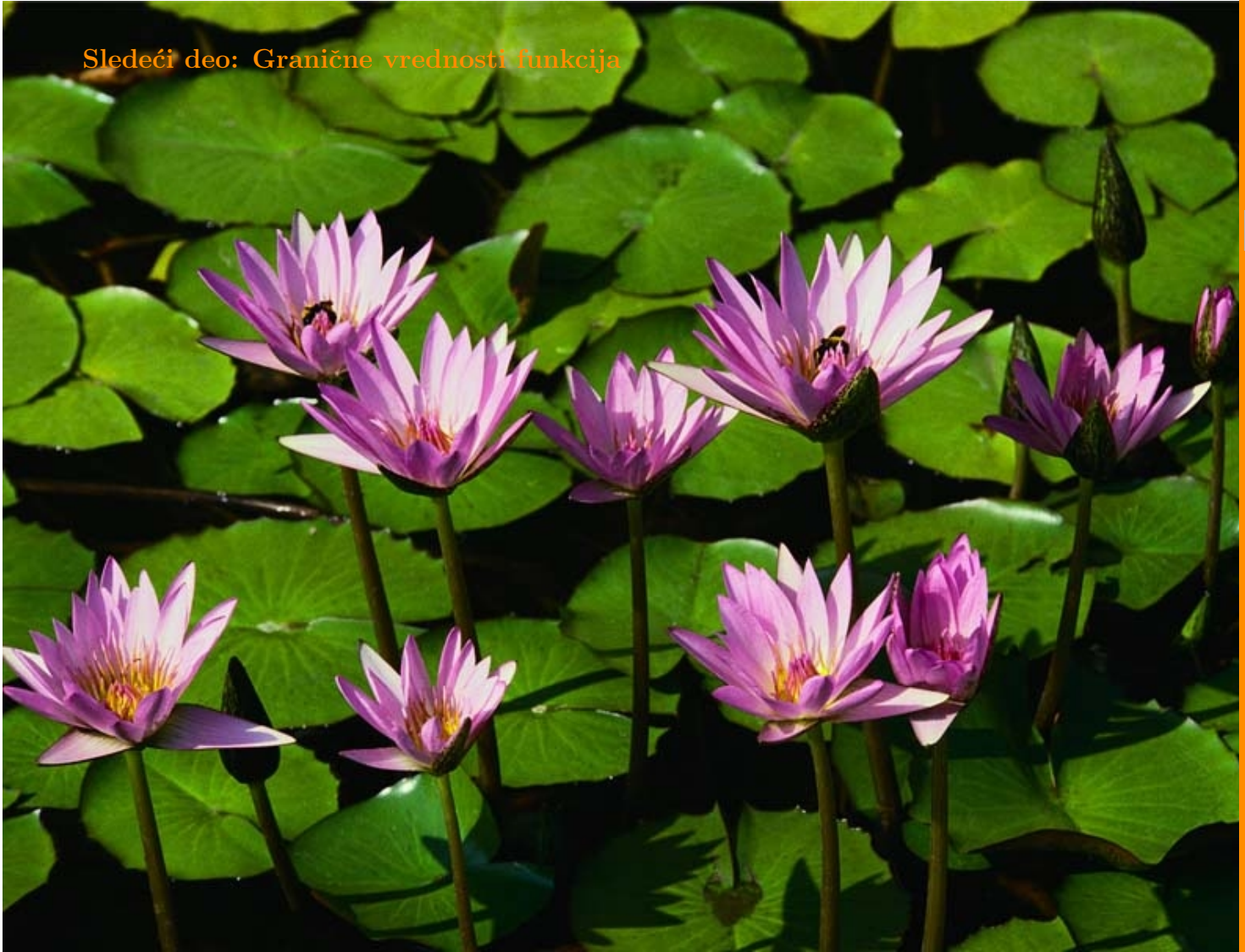
- Metode dokaza:
  - direktan dokaz

- Metode dokaza:
  - direktan dokaz
  - dokaz svođenjem na apsurd

- Metode dokaza:
  - direktan dokaz
  - dokaz svođenjem na apsurd
  - dokaz matematičkom indukcijom

- Metode dokaza:
  - direktan dokaz
  - dokaz svođenjem na apsurd
  - dokaz matematičkom indukcijom
  - dokaz navođenjem kontraprimera

- Metode dokaza:
  - direktan dokaz
  - dokaz svođenjem na apsurd
  - dokaz matematičkom indukcijom
  - dokaz navođenjem kontraprimera
  - dokaz kontrapozicijom


Sledeći deo: Granične vrednosti funkcija